www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSET B''

L'exercice et les deux problèmes sont indépendants

DURÉE : 3 heures

EXERCICE

1. Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de dimension finie.

   a. Soit u une application linéaire de E dans F et v une application linéaire de F dans G.

   On note (*) la propriété :

   $$\text{Im}\,(v \circ u) = \text{Im}\, v \quad (*)$$

   Montrer que si u est surjective, (*) est satisfaite.

   b. On suppose que (*) est satisfaite et que si $x \in E$ et $u(x) \neq 0$ alors $v[u(x)] \neq 0$.

   i. Montrer que $\text{Ker}\, u = \text{Ker}\,(v \circ u)$.
   ii. Montrer que $\dim \text{Ker}\, u = \dim E - \text{rg}\,(v \circ u)$.
   iii. Montrer que $\text{Im}\, u \cap \text{Ker}\, v = \{0\}$.
   iv. En déduire que $F = \text{Ker}\, v \oplus \text{Im}\, u$.

   c. On suppose $F = \text{Ker}\, v \oplus \text{Im}\, u$.
   Montrer que si $x \in E$ et $u(x) \neq 0$ alors $v[u(x)] \neq 0$.
   Montrer que $\text{Im}\,(v \circ u) = \text{Im}\, v$.

2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et u un endomorphisme de E.

   On note $u^2 = u \circ u$.

   a. On suppose E de dimension finie. Démontrer l'équivalence des trois assertions :

   i. $E = \text{Im}\, u \oplus \text{Ker}\, u$;
   ii. $\text{Ker}\, u = \text{Ker}\, u^2$;
   iii. $\text{Im}\, u = \text{Im}\, u^2$.

   En utilisant par exemple la représentation matricielle des endomorphismes, donner un endomorphisme u tel que ii. et iii. soient vérifiées et u différent de u^2.

   b. Soit $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable sur $\mathbb{R}$.
   Soit u l'application $P \mapsto u(P) = P'' + 2P'$ où P' (resp. P'') est le polynôme dérivé (resp. dérivé seconde). Montrer que u est une application linéaire sur $\mathscr{P}$. Parmi les égalités i., ii., iii. de la question 2.*a.*, quelles sont celles qui sont vérifiées ?

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME 1

On considère la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ et ses fonctions dérivées, définies sur $\mathbb{R}$. On note $f^{(n)}(x)$ la dérivée n-ième de f, $n \in \mathbb{N}$.

I

1. Montrer que :
   a. $f'(x) = -2xf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   b. $f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant 1$,
   (avec la convention $f^{(0)}(x) = f(x)$).
2. Montrer que $f^{(n)}(x) = e^{-x^2} P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n vérifiant :
$$P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant 1.$$
   Ces polynômes P_n sont appelés polynômes de Hermite.
   Déterminer P_n pour $0 \leqslant n \leqslant 3$.
3. *a.* Que vaut le coefficient du terme de plus haut degré de P_n ?
   b. Donner, pour n impair, une racine évidente de P_n.
   c. Étudier, suivant la parité de l'entier n, la parité de la fonction P_n. Qu'en déduire sur les coefficients du polynôme P_n ?
   d. Chercher la valeur du terme constant de P_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_n a n racines réelles distinctes $(a_j)_{j=1}^n$ telles que :
$$\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad a_j < a_{j+1}.$$
   a. Montrer que $\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $]a_j, a_{j+1}[$.
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f^{(n)}(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{(n)}(x)$.
   c. Montrer que $f^{(n)}$ n'est pas monotone sur $]-\infty, a_1[$.
   d. En déduire que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $]-\infty, a_1[$.
5. Montrer que P_n a n racines réelles distinctes pour tout n.
6. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant 1 \quad P_n'(x) = -2nP_{n-1}(x)$.

II

1. Montrer que pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P(x)Q(x)\,dx$ converge.
   On la note $< P, Q >$. Vérifier que $< , >$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{P}$ des polynômes à coefficients réels.
2. Montrer que si $n \neq m$, le produit scalaire $< P_n, P_m >$ est nul. On utilisera I.6, la définition de P_n et une intégration par parties.
3. *a.* Montrer que le calcul de $< P_n, P_n >$ se ramène au calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.
   b. Donner une suite $(Q_n)_{n \geqslant 0}$ de polynômes, orthonormale pour le produit scalaire $< , >$. On rappelle que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

III

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $\quad P_n^{(k)}(0) = (-2)^k \dfrac{n!}{(n-k)!} P_{n-k}(0)$.
2. En déduire la valeur des coefficients de P_n. On discutera suivant la parité de n.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME 2

1. On considère f, g, h, k des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + g(x-y) = h(x) + k(y).$$

a. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, $H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$ et $K(x) = \int_0^x k(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

i. Montrer que les fonctions F, G, K, H sont dérivables ; calculer leurs dérivées.

ii. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}$,

$$F(x+y) - F(x) - G(x-y) + G(x) - K(y) = y\,h(x). \qquad (1)$$

b. En utilisant (1), montrer que h est dérivable puis que k est dérivable, et en déduire que f et g le sont également.

Montrer que f, g, h, k sont en fait indéfiniment dérivables.

c. Montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \forall v \in \mathbb{R},\quad f''(u) = g''(v).$$

d. Montrer que f, g, h et k sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

2. Soit ϕ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Si $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $\phi(X) = \phi(x_1, x_2)$.

Si $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ appartiennent à $\mathbb{R}^2$, on note $<X, Y>$ le produit scalaire :

$$<X, Y> = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

On suppose que :

$$\mathcal{H} \begin{cases} \phi \text{ est continue} \\ \forall X \in \mathbb{R}^2,\ \phi(X) \geqslant 0 \\ \forall X \in \mathbb{R}^2,\ \forall Y \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } <X, Y> = 0,\ \Phi(X+Y) = \Phi(X) + \Phi(Y). \end{cases}$$

a. Calculer $\phi(0, 0)$.

b. Soit $\varphi_1(x) = \phi(x, 0)$ et $\varphi_2(y) = \phi(0, y)$.

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x+y) + \varphi_2(x-y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_1(y) + \varphi_2(-y).$$

c. Montrer qu'il existe a, α, b, β et c constantes réelles telles que :

$$\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\quad \phi(X) = a x_1^2 + \alpha x_2^2 + b x_1 + \beta x_2 + c.$$

Quelle est la valeur de c ?

d. Soit $X \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda > 1$.

Soit $Y \in \mathbb{R}^2$, $Y \neq (0,0)$ tel que $<X, Y> = 0$.

Montrer que l'on peut trouver $\mu \in \mathbb{R}$ et $Z \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} \lambda X = X + \mu Y + Z, \\ <Z, X + \mu Y> = 0. \end{cases}$$

En déduire que $\phi(\lambda X) \geqslant \phi(X)$.

e. Montrer, en utilisant la question *c* que $\phi(X) = a(x_1^2 + x_2^2)$, avec $a \geqslant 0$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail